ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАДАЧ НЕЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ (НЛП).

Лабораторная работа 5

Рассматривается задача минимизации с ограничениями смешанного типа:

$$f(x) \to \min, \qquad (1)$$

$$g_i(x) = 0, i = \overline{1, p} \qquad (2)$$

$$g_i(x) \le 0, i = \overline{p+1, q} \qquad (3)$$

$$x \in R^n, f(x) \in C^{(1)}, g_i(x) \in C^{(1)}, i = \overline{1, q}$$

Схема исследования.

1. Сведение задачи (1)-(3) к более простой задаче этого же типа (метод исключения). Если из К-го ограничения – равенства $g_k(x) = 0, 1 \le k \le p,$ можно легко выразить одну из переменных $x_{i^*}, 1 \le i^* \le n,$ через остальные

$$x_i = h(x_i, i = \overline{1, n}, i \ne i^*), \qquad (4)$$

То переменную x_{i^*} в задаче (1) – (3) удобно исключить. Для этого в функции $f(x), g_i(x), i = \overline{1, q}, i \ne k$ подставляют вместо x_{i^*} выражение из связи (4). В результате получаем эквивалентную задачу типа (1) – (3), но с меньшим числом неизвестных (на одно) и с меньшим числом ограничений (на одно). После полного завершения исследований новой задачи, используя её эквивалентность исходной, делаем выводы о задаче (1) - (3). Не ограничивая общности, считаем далее, что задача (1) – (3) не поддаётся упрощению.

2. Исследование вопроса о существовании решения задачи (1) – (3). Здесь используются критерий существования решений задач НЛП или теорема Вейерштрасса. Если в результате мы убеждаемся, что у задачи решения нет, то исследование прекращается. Если решение есть (этот факт важен и используется в п.7) либо нельзя дать определённый ответ о его существовании, то поиск продолжается.

3. Нахождение условно-стационарных точек задачи (1) – (3) (точек подозрительных на решение).

а) составляем классическую функцию Лагранжа

$$F(x, \lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^{q} \lambda_i g_i(x),$$

$$\lambda_i \ge 0, i = \overline{p+1, q}$$

б) используя классическое уравнение множителей Лагранжа, составляем систему уравнений для поиска условно-стационарных точек.

$$\frac{\partial F(x,\lambda)}{\partial x}=0, g_i(x)=0, i=\overline{1,p},$$

$$\lambda_i g_i(x)=0, i=\overline{p+1,q}, \qquad (5)$$

$$\lambda_i \geq 0, i=\overline{p+1,q}, x\in X$$

в) находим $\{x^s,\lambda^s\}, s=\overline{1,m}$ - все решения системы (5).

4. Необходимое условие второго порядка.

Количество точек, подозрительных на решение, можно сократить, используя необходимое условие второго порядка (здесь предполагаем, что $f(x), g_i(x)\in C^{(2)}, i=\overline{1,q}.$ Для каждой пары проверяем на неторицательность квадратичную форму:

$$l'\frac{\partial^2 F(x^s,\lambda^s)}{\partial x^2}l\geq 0 \qquad (6)$$

На множестве допустимых направлений $l\in R^n$:

$$l'\frac{\partial g_i(x^s)}{\partial x}=0, i=\overline{1,p} \qquad (7)$$

$$l'\frac{\partial g_i(x^s)}{\partial x}=0, i=I_a^+(x^s)=\{i: g_i(x^s)=0,\lambda_i^s>0\} \qquad (8)$$

$$l'\frac{\partial g_i(x^s)}{\partial x}\leq 0, i=I_a^0(x^s)=\{i: g_i(x^s)=0,\lambda_i^s=0\} \qquad (9)$$

<u>Замечание.</u>

Условие (6) как и условие (10) из п.6 удобно сначала проверять для $\forall l\in R^n$, а затем сравнить множества, на которых они не выполняются, с множеством, выделяемым условиями (7) – (9).

5. Достаточное условие оптимальности.

Пусть $\{x^s,\lambda^s\}, s=\overline{1,m^1}$ - пары, удовлетворяющие условиям (6) – (9). Используя достаточное условие оптимальности, находим из числа точек, подозрительных на решение ,локально-оптимальные планы. Ими будут те $x^s, s=\overline{1,m^1}$, для которых выполняется неравенство

$$l'\frac{\partial^2 F(x^s,\lambda^s)}{\partial x^2}l>0, 1\leq s\leq m^1 \qquad (10)$$

На множестве векторов l, удовлетворяющих (7) – (9). $l\neq 0.$

Пусть $x^s, s=\overline{1,m^{11}}$ - локально-оптимальные планы. Находим из них лучший план x^* по правилу $f(x^*)=\min\limits_{1\leq s\leq m^{11}} f(x^s)$.

6. в случае нелинейных ограничений точки, подозрительные на решение, могут также находиться (согласно обобщённому правилу множителей Лагранжа) среди решений системы

$$\sum_{i=1}^{q} \lambda_i \frac{\partial g_i(x)}{\partial x} = 0,$$

$$g_i(x) = 0, i = \overline{1, p}$$

$$\lambda_i g_i(x) = 0, i = \overline{p+1, q}, \lambda_i \geq 0, i = \overline{p+1, q}, x \in X$$

Решения этой системы присоединяем к уже найденным точкам, подозрительным на решение исходной задачи.

7. Нахождение оптимального плана.

Если у задачи (1) – (3) существует решение (см.п.2) и найдены все точки, подозрительные на решения $x^s, s = \overline{1, l}$,то оптимальный план x^0 можно найти из соотношения

$$f(x^0) = \min_{1 \leq s \leq l} f(x^s)$$

8. Поведение целевой функции на бесконечности.

Если определённого ответа на вопрос о существовании решения нет и X неограниченная область, то необходимо исследовать поведение целевой функции при $|x| \to \infty$ по различным направлениям.

9. Результаты исследования.

На основании п.1 – п.8 делаем заключение о результатах исследования задачи (1) – (3). В общем случае из-за сложности нелинейных задач, такое заключение не удаётся сделать полным.

Пример 1.

$$\begin{aligned} &2x_1^2 - x_2 - 1 \to \min \\ &x_1 + x_2 \leq 1, \\ &2x_1 - x_2 \geq 1, x_1 \geq 0 \end{aligned} \qquad (11)$$

Исследование.

1. Записываем задачу (11) в виде (1) – (3)

$$\begin{aligned} &f(x) = 2x_1^2 - x_2 - 1 \to \min \\ &g_1(x) = x_1 + x_2 - 1 \leq 0, \\ &g_2(x) = -2x_1 + x_2 + 1 \leq 0, \\ &g_3(x) = -x_1 \leq 0 \end{aligned} \qquad (12)$$

Задача не поддаётся упрощению.

2. Исследуем вопрос о существовании решения задачи (12). Построим множество её планов.

Множество планов $X = \{x \in R^2 : x_1 + x_2 \le 1, 2x_1 + x_2 \ge 1, x_1 \ge 0\}$ неограниченная область. Строим множество уровня целевой функции $X_f(1) = \{x : 2x_1^2 - x_2 - 1 \le 1\}$.

Пересечение $X \cap X_f(1)$ (см.рис.1) компактно, и на этом множестве целевая функция непрерывна. Следовательно, по теореме Вейерштрасса у задачи (12) существует оптимальный план.

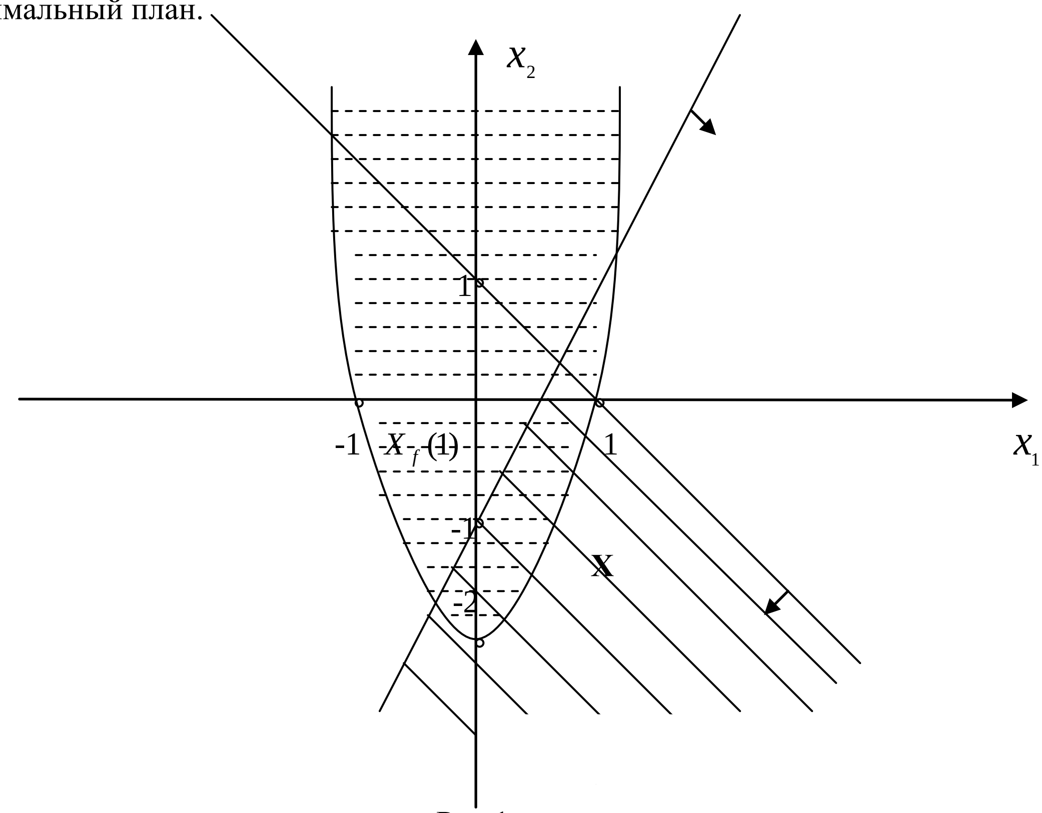


Рис.1

3. Ограничения задачи линейны (проверка на обыкновенность не требуется), следовательно, для её решения применяем классическое правило множителей Лагранжа.

$$F(x,\lambda) = 2x_1^2 - x_2 - 1 + \lambda_1(x_1 + x_2 - 1) - \lambda_2(2x_1 - x_2 - 1) - \lambda_3 x_1,$$

$$x \in X, \lambda \ge 0$$

Находим условно-стационарные точки. Имеем систему

$$\begin{aligned}
&4x_1 + \lambda_1 - 2\lambda_2 - \lambda_3 = 0,\\
&-1 + \lambda_2 + \lambda_1 = 0,\\
&\lambda_1(x_1 + x_2 - 1) = 0,\\
&\lambda_2(2x_1 - x_2 - 1) = 0,\\
&\lambda_3 x_1 = 0, x \in X, \lambda \ge 0.
\end{aligned} \tag{13}$$

Возможны 8 случаев:

1) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0.$ Нет решения.

2) $\lambda_1 = \lambda_2 = 0, x_1 = 0.$ Нет решения.

3) $\lambda_1 = \lambda_3 = 0, 2x_1 - x_2 - 1 = 0.$

Имеем точку $\{x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = 0, \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 0\}$.

4) $\lambda_2 = \lambda_3 = 0, x_1 + x_2 - 1 = 0$.

Для точки $\{-\frac{1}{4}, \frac{5}{4}, 1, 0, 0\}$ $\quad x \in X$.

5) $\lambda_1 = 0, 2x_1 - x_2 - 1 = 0, x_1 = 0.$

Для точки $\{0,-1,0,1,-2\}, \lambda_3 < 0.$

6) $\lambda_2 = 0, x_1 + x_2 - 1 = 0, x_1 = 0.$

Для точки $\{0,1,1,0,1\}$ $x \in X$.

7) $\lambda_3 = 0, x_1 + x_2 - 1 = 0, 2x_1 - x_2 - 1 = 0.$

Для точки $\{\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{9}, \frac{11}{9}, 0.\}$ $\lambda_1 < 0.$

8) $x_1 = 0, x_1 + x_2 - 1 = 0, 2x_1 - x_2 - 1 = 0$ нет решения.

Итак, получили одну условно-стационарную точку $\{x^1, \lambda^1\} = \{\frac{1}{2}, 0, 0, 1, 0\}$.

4. Проверяем для условно-стационарной точки необходимое и достаточное условия оптимальности. Так как

$l'\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} l = (l_1, l_2).\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \end{pmatrix} = 4l_1^2 \geq 0, \forall l \in R^2$, то точка x^1 удовлетворяет необходимому условию второго порядка.

Для точки x^1 множество (7) – (9) имеет вид:

$$\{l : l'\frac{\partial g_2(x')}{\partial x} = 0\} = \{l \in R^2 : -2l_1 + l_2 = 0\}.$$

На этом множестве $4l_1^2 > 0$ всюду кроме точки $\{0,0\}$. Следовательно, достаточное условие выполняется и точка x^1 локально-оптимальный план.

5. Так как точка x^1 - единственная подозрительная на решение и у задачи решение существует, то $x^0 = x^1$ - оптимальный план, $f(x^0) = -\frac{1}{2}$.

Пример 2.

$$x_1^2 - 2x_1x_2 - x_2^2 + 2x_3 \to \min,$$

$$\begin{cases} x_1 + x_1x_2 - x_3 = 1, \\ x_1 + 2x_2 \leq 2, \\ 4x_1 + 3x_1x_2 - 3x_3 \geq 2 \end{cases} \tag{14}$$

Исследование.

1. Из первого ограничения-равенства можно выразить одну из переменных (например x_3) и исключить её из задачи

$$x_3 = x_1 + x_1 x_2 - 1 \qquad (15)$$

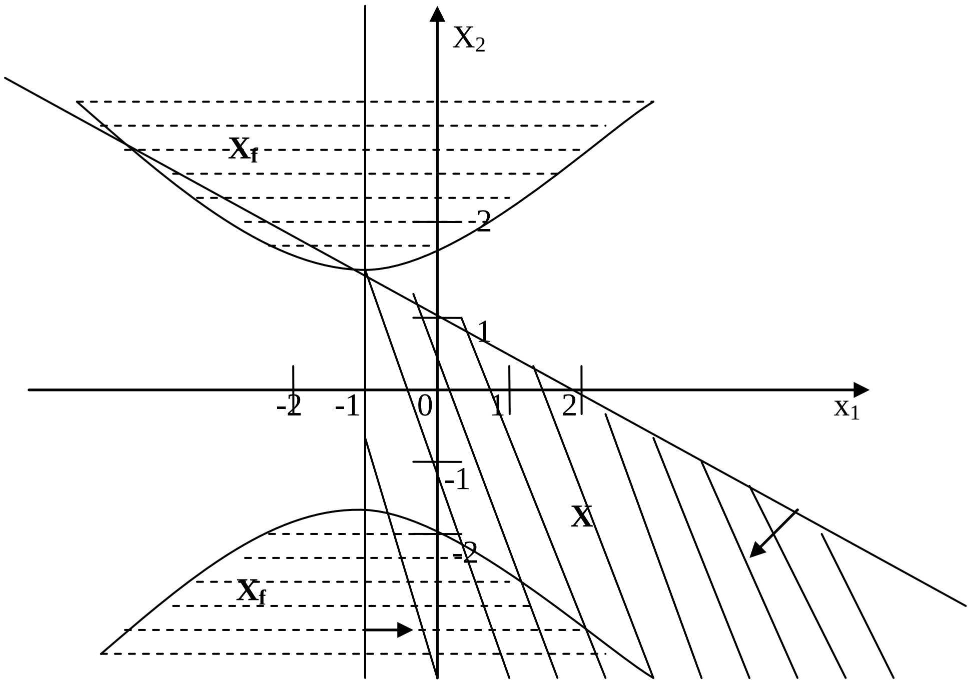
Эквивалентная задача имеет вид:

$$x_1^2 + 2x_1 - x_2^2 - 2 \to \min$$

$$g_1(x) = x_1 + 2x_2 - 2 \le 0, \qquad (16)$$

$$g_2(x) = -x_1 - 1 \le 0.$$

2. Множество планов X задачи (16) неограниченно. Пересечение множества уровня $X_f(-4) = \{x : (x_1+1)^2 - x_2^2 + 1 \le 0\}$ с множеством планов X, также неограниченная область. Следовательно, определённого ответа на вопрос о существовании решения сразу нельзя получить.



3. Ищем условно-стационарные точки.

$$F(x,\lambda) = x_1^2 + 2x_1 - x_2^2 - 2 + \lambda_1(x_1 + 2x_2 - 2) - \lambda_2 + x_1 + 1),$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2 + \lambda_1 - \lambda_2 = 0, \\ -2x_2 + 2\lambda_1 = 0, \\ \lambda_1(x_1 + 2x_2 - 2) = 0, \\ \lambda_2(x_1 + 1) = 0. \end{cases}$$

Возможны 4 случая:

1) $\lambda_1 = \lambda_2 = 0.$ Имеем точку {-1,0,0,0}

2) $\lambda_1 = 0, x_1 + 1 = 0.$ Та же точка.

3) $\lambda_2 = 0, x_1 + 2x_2 - 2 = 0.$

Для точки {-2,2,2,0} $x \in X$

4) $x_1+1=0, x_1+2x_2-2=0.$ Имеем точку $\{-1,\frac{3}{2},\frac{3}{2},\frac{3}{2}\}$.

Итак, получено две условно-стационарные точки:

$$\{x^1,\lambda^1\}=\{-1,0,0,0\};\{x^2,\lambda^2\}=\{-1,\frac{3}{2},\frac{3}{2},\frac{3}{2}\}.$$

4.а) Для точки $\{x^1,\lambda^1\}$ множество (7) – (9) имеет вид

$$\{l: l'\frac{\partial g_2(x^1)}{\partial x}=(l_1,l_2)\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}=-l_1\le 0\}$$

и на нём квадратичная форма:

$$l'\frac{\partial^2 f(x^1)}{\partial x^2}l=(l_1,l_2)\begin{pmatrix}2 & 0\\0 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}l_1\\l_2\end{pmatrix}=2l_1^2-2l_2^2 \qquad (17)$$

Не являются всюду неотрицательной (например для точки $l_1=0, l_2=1$).

Следовательно, x^1 не является локально-оптимальным планом;

Б) для точки $\{x^2,\lambda^2\}$ множество (7) – (9) имеет вид

$\{l: l_1=0, l_1+2l_2=0\}=\{0,0\}$ и на нём квадратичная форма (17) обращается в нуль. Следовательно, x^2 остаётся подозрительным на локально-оптимальный план.

5. Исследуем поведение целевой функции на бесконечности.

Луч $x_1=0, x_2\le -1$ принадлежит множеству планов X. На нём целевая функция задачи (15) имеет вид $f(x)=-x_2^2-2.$ При $x_2\to-\infty$ вдоль луча, $f(x)\to-\infty$. Таким образом, задача (16) не имеет решения из-за неограниченности снизу целевой функции на множестве планов.

Вывод. Задача (14) не имеет решения.

Задание. Исследовать на экстремум следующие задачи:

1.
$$\begin{aligned}&f(x)=-x_1^2-x_2^2+7\to\max\\&x_1+x_2\le 3,\\&2x_1-x_2\ge 1,\\&x_1\ge 0\end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned}&f(x)=x_1^2-2x_2+3\to\min\\&4x_1-x_2\le 1,\\&x_1+2x_2\le 2,\\&x_1\ge 0, x_2\ge 0\end{aligned}$$

3.
$$\begin{aligned}&f(x)=-x_1x_2+x_2+1\to\max\\&x_1+x_2\ge 1,\\&2x_1-x_2\le 2,\\&x_1\ge 0, x_2\ge 0\end{aligned}$$

4.
$$\begin{aligned}&f(x)=x_1^2+x_2^2-1\to\min\\&3x_1+2x_2\le 1,\\&4x_1-x_2\le 1,\\&x_1\ge 0\end{aligned}$$

5. $$\begin{aligned} &f(x) = x_1 - 2x_2^2 + x_2 \to \max \\ &x_1 + x_2 \le 1, \\ &2x_1 - x_2 \le 2, \\ &x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

6. $$\begin{aligned} &f(x) = 7x_1^2 + 2x_2^2 + x_2 \to \min \\ &x_1 - 2x_2 + 1 \le 0, \\ &4x_1 - x_2 \le 1, \\ &x_1 \ge 0 \end{aligned}$$

7. $$\begin{aligned} &f(x) = 8x_1 - x_2^2 + 4 \to max \\ &x_1 - 3x_2 \le 1, \\ &x_1 - x_2 \le 2, \\ &x_1 \ge 0 \end{aligned}$$

8. $$\begin{aligned} &f(x) = -x_1^2 - x_2 + 2x_1 \to \min \\ &3x_1 - x_2 \le 1, \\ &x_1 + x_2 = 2, \\ &x_1 \ge 0 \end{aligned}$$

9. $$\begin{aligned} &f(x) = 8x_1 - x_2^2 + 4 \to \min \\ &3x_1 - x_2 \ge 1, \\ &x_1 - 2x_2 \le 2, \\ &x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

10. $$\begin{aligned} &f(x) = 4x_1^2 - x_1 x_2 \to \min \\ &x_1 + x_2 \le 1, \\ &2x_1 - x_2 \le 2, \\ &x_1 \ge 0 \end{aligned}$$

11. $$\begin{aligned} &f(x) = x_1^2 - 2x_2^2 + x_1 \to \min \\ &3x_1 - x_2 = 1, \\ &x_1 - 2x_2 \le 2, \\ &x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

12. $$\begin{aligned} &f(x) = x_2^2 - x_1 \to \min \\ &2x_1 + x_2 \le 1, \\ &x_1 + x_2 \le 1, \\ &x_1 \ge 0 \end{aligned}$$

13. $$\begin{aligned} &f(x) = x_1^2 - 2x_2 \to \min \\ &2x_1 + x_2 \ge 1, \\ &x_1 - x_2 \le 2, \\ &x_1 \ge 0 \end{aligned}$$

14. $$\begin{aligned} &f(x) = x_1^2 + 2x_2 + 7 \to \min \\ &2x_1 - x_2 \ge 1, \\ &x_1 - x_2 \le 2, \\ &x_1 \ge 0 \end{aligned}$$

15. $$\begin{aligned} &f(x) = 2x_1^2 - x_2 - 1 \to \min \\ &x_1 + x_2 \le 1, \\ &2x_1 - x_2 \ge 1, \\ &x_1 \ge 0 \end{aligned}$$

16. $$\begin{aligned} &f(x) = x_1^2 - x_2^2 + 1 \to \min \\ &2x_1 - x_2 \le 1, \\ &3x_1 + x_2 \le 2, \\ &x_1 \ge 0 \end{aligned}$$

17. $$\begin{aligned} &f(x) = 2x_1^2 - x_2 - 1 \to \min \\ &x_1 + x_2 = 2, \\ &-x_1 - 2x_2 \le 1, \\ &x_1 \ge 0 \end{aligned}$$

18. $$\begin{aligned} &f(x) = x_1^2 - x_2 - 1 \to \min \\ &x_1 + x_2 = 1, \\ &2x_1 - x_2 \le 1 \end{aligned}$$

19. $$\begin{aligned} &f(x) = x_1^2 - x_1x_2 - x_2^2 \to \min \\ &x_1 + 2x_2 = 3, \\ &x_1 + x_2 \le 1, \\ &x_1 \le 0 \end{aligned}$$

20. $$\begin{aligned} &f(x) = x_1^3 - x_2^2 \to \min \\ &2x_1 - x_2 = 1, \\ &x_1 + x_2 \le 1 \end{aligned}$$

21. $$\begin{aligned} &f(x) = x_1^4 - x_2 - 1 \to \min \\ &3x_1 + x_2 \le 1, \\ &-x_1 - x_2 \ge -1 \end{aligned}$$

22. $$\begin{aligned} &f(x) = x_1^2 - x_2^2 + x_1x_3 \to \min \\ &x_1 - 2x_2 \ge -1, \\ &x_1 \ge 0, \\ &x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

23. $$\begin{aligned} &f(x) = x_1^2 - x_1x_2 \to \min \\ &2x_1 - x_2 \le 1, \\ &-x_1 - x_2 \ge -1 \end{aligned}$$

24. $$\begin{aligned} &f(x) = \frac{1}{3}x_1^2 - x_2 - 6 \to \min \\ &x_1 - 2x_2 \le 1, \\ &x_1 \ge 0 \end{aligned}$$

25. $$\begin{aligned} &f(x) = \frac{1}{4}x_1^4 - 2x_2 - 1 \to \min \\ &4x_1 + x_2 \le 1, \\ &-2x_1 + x_2 \le 1, \\ &x_1 \ge 0 \end{aligned}$$

25. $$\begin{aligned} &f(x) = -x_1^2 - x_2^2 - 1 \to \max \\ &2x_1 + x_2 \ge 1, \\ &x_1 + x_2 \le 2. \end{aligned}$$